Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas II (MA1112)
Abr-Jul 2024
3^er Examen Parcial (35 %)

Solución

Pregunta 1. (2 ptos. c/u) Calcule los siguientes límites:

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(e^x + x\right)^{3/x}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to\pi^-} \left(\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^{\left(1 - x\operatorname{sen}(1/x)\right)}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} \left(e^x + x\right)^{3/x} = \exp\left(3 \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(e^x + x\right)}{x}\right) \overset{\substack{\text{L'H}\\ \downarrow}}{=} \exp\left(3 \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + 1}{e^x + x}\right)$$

$$= \exp\left(3\, \frac{1 + \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}}{1 + \lim\limits_{x\to\infty} \left(x/e^x\right)}\right) \overset{\substack{\text{L'H}\\ \downarrow}}{=} \exp\left(3\, \frac{1 + \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}}{1 + \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}}\right) = e^3$$

$$\lim_{x\to\pi^-} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^{\left(1 - x\operatorname{sen}(1/x)\right)}$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to\pi^-} \left(1 - x\operatorname{sen}(1/x)\right) \ln\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\left(1 - \pi\operatorname{sen}(1/\pi)\right) \lim_{x\to\pi^-} \ln\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = u}}{=} \exp\left(\left(\underbrace{1 - \frac{\operatorname{sen}(1/\pi)}{1/\pi}}_{>0}\right) \lim_{u\to 0^+} \ln(u)\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \left(1 - \pi\operatorname{sen}(1/\pi)\right)\ln(u) = w}}{=} \lim_{w\to-\infty} e^w = 0$$

Pregunta 2. (7 ptos.) Determine si la integral impropia

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}}$$

es o no convergente; en caso de ser convergente, calcúlela.

Solución: Como la recta $x = 0$ es asíntota vertical de la función involucrada, separamos

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}} = \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}} + \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}}$$

Usando que

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}} \underset{\substack{\uparrow \\ x=u^2}}{=} 2\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = 2\arctan(u)+C = 2\arctan\big(\sqrt{x}\big)+C$$

calculamos las integrales impropias

$$\begin{aligned}\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}} &= \lim_{a\to 0^+}\int_a^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+}\left(2\arctan\big(\sqrt{x}\big)\Big|_a^1\right)\\ &= 2\lim_{a\to 0^+}\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\big(\sqrt{a}\big)\right) = 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}} &= \lim_{b\to \infty}\int_1^{b} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}} = \lim_{b\to \infty}\left(2\arctan\big(\sqrt{x}\big)\Big|_1^b\right)\\ &= 2\lim_{b\to \infty}\left(\arctan\big(\sqrt{b}\big) - \frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Como ambas integrales convergen, se tiene que la integral impropia deseada también converge. Más aún,

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}} = \int_0^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}} + \int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Pregunta 3. (4 ptos.) Determine si es **verdadero o falso** que

$$\int_0^\pi \tan(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Solución: La función tangente posee asíntota vertical $x = {}^{\pi}/_{2}$, en el intervalo $[0,\pi]$, por lo que es necesario separar

$$\int_0^\pi \tan(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \tan(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} \tan(x)\,\mathrm{d}x$$

Luego, la integral impropia $\displaystyle\int_0^\pi \tan(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente si, y sólo si, ambas integrales impropias $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan(x)\,\mathrm{d}x$ y $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \tan(x)\,\mathrm{d}x$ convergen. Sin embargo, ninguna de ellas converge ya que

$$\lim_{b\to\pi/2^-} \int_0^b \tan(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\pi/2^-} \ln\left|\sec(x)\right|\Big|_0^b = \lim_{b\to\pi/2^-} \Big(\ln\left|\sec(b)\right|\Big) = \infty$$

o también

$$\lim_{a\to\pi/2^+} \int_a^\pi \tan(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\pi/2^+} \ln\left|\sec(x)\right|\Big|_a^\pi = \lim_{a\to\pi/2^+} \Big(-\ln\left|\sec(a)\right|\Big) = -\infty$$

Por lo tanto, el enunciado es **falso**.

Pregunta 4. (6 ptos.) Halle la longitud de la curva

$$y = \int_1^x \sqrt{(t+1)^{20}-1}\,\mathrm{d}t$$

desde $x = a$ hasta $x = b$, con $0 < a < b$.

Solución: Usando el Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^x \sqrt{(t+1)^{20}-1}\,\mathrm{d}t = \sqrt{(x+1)^{20}-1}$$

Luego, la longitud de la curva $y = y(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$ viene dada por

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b (x+1)^{10}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{11}(x+1)^{11}\Big|_a^b$$

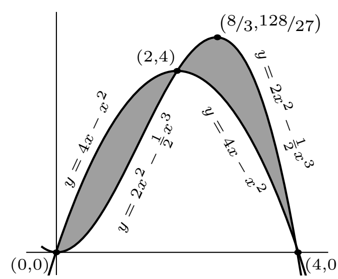
$$= \frac{1}{11}\Big((b+1)^{11} - (a+1)^{11}\Big)$$

Pregunta 5. Sea $\mathcal{R}$ la región encerrada por las curvas

$$y = 4x - x^2 \qquad \text{y} \qquad y = 2x^2 - \frac{1}{2}x^3$$

- **(6 ptos.)** Calcule el área de la región $\mathcal{R}$
- Halle una expresión para el volumen **(sin calcularlo)** que se genera al hacer girar la región $\mathcal{R}$ alrededor de:
  - **(4 ptos.)** La recta $x = -3$
  - **(4 ptos.)** La recta $y = 6$

Solución: Las curvas dadas se cortan en los puntos $(0,0)$, $(2,4)$ y $(4,0)$. Si $x \in [0,2]$ entonces $4x - x^2 \leq 2x^2 - \frac{1}{2}x^3$ mientras que si $x \in [2,4]$ entonces $4x - x^2 \geq 2x^2 - \frac{1}{2}x^3$.



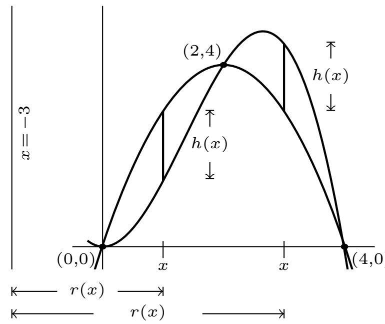
Calculamos el área de la región $\mathcal{R}$, con un diferencial de área dado por

$$\mathrm{d}A = \begin{cases} \Big(\big(4x - x^2\big) - \big(2x^2 - \frac{1}{2}x^3\big)\Big)\,\mathrm{d}x & \text{, para } x \in [0,2] \\ \Big(\big(2x^2 - \frac{1}{2}x^3\big) - \big(4x - x^2\big)\Big)\,\mathrm{d}x & \text{, para } x \in [2,4] \end{cases}$$

para luego integrar

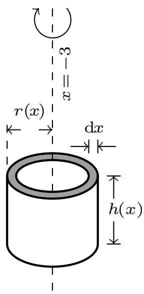
$$\underbrace{\int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 4x\right)\mathrm{d}x}_{=2} + \underbrace{\int_2^4 \left(-\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 4x\right)\mathrm{d}x}_{=2} = 4$$

El volumen del sólido que se genera al hacer girar la región $\mathcal{R}$ alrededor de la recta $x = -3$ lo expresaremos considerando el diferencial de volumen haciendo cortes coaxiales (método de cascarones). Es decir,



$$\mathrm{d}V = 2\pi\, r(x)\, h(x)\, \mathrm{d}x$$

donde



$$r(x) = x + 3 \qquad \text{para } x \in [0,4]$$

$$h(x) = \begin{cases} \left(4x - x^2\right) - \left(2x^2 - \frac{1}{2}x^3\right) & \text{, para } x \in [0,2] \\ \left(2x^2 - \frac{1}{2}x^3\right) - \left(4x - x^2\right) & \text{, para } x \in [2,4] \end{cases}$$

por lo que

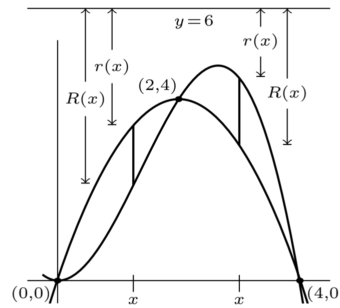
$$\mathrm{d}V = \begin{cases} 2\pi(x+3)\Big(\left(4x - x^2\right) - \left(2x^2 - \frac{1}{2}x^3\right)\Big) & \text{, para } x \in [0,2] \\ 2\pi(x+3)\Big(\left(2x^2 - \frac{1}{2}x^3\right) - \left(4x - x^2\right)\Big) & \text{, para } x \in [2,4] \end{cases}$$

Así, para este sólido, el volumen viene dado por

$$2\pi \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^3 - 5x^2 + 12x\right) \mathrm{d}x$$

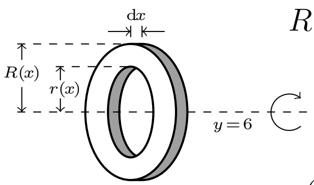
$$+ 2\pi \int_2^4 \left(-\frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^3 + 5x^2 - 12x\right) \mathrm{d}x$$

Por otra parte, el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región $\mathcal{R}$ alrededor de la recta $y=6$ lo expresamos considerando el diferencial de volumen haciendo cortes transversales al eje de rotación (método de arandelas). Así,



$$\mathrm{d}V=\pi\Big(\big(R(x)\big)^2-\big(r(x)\big)^2\Big)\,\mathrm{d}x$$

donde



$$R(x)=\begin{cases}6-\left(2x^2-\frac{1}{2}x^3\right) & \text{, para } x\in[0,2]\\ 6-\left(4x-x^2\right) & \text{, para } x\in[2,4]\end{cases}$$

$$r(x)=\begin{cases}6-\left(4x-x^2\right) & \text{, para } x\in[0,2]\\ 6-\left(2x^2-\frac{1}{2}x^3\right) & \text{, para } x\in[2,4]\end{cases}$$

por lo que

$$\mathrm{d}V=\begin{cases}\pi\left(\left(6-\left(2x^2-\frac{1}{2}x^3\right)\right)^2-\left(6-\left(4x-x^2\right)\right)^2\right) & \text{, para } x\in[0,2]\\ \pi\left(\left(6-\left(4x-x^2\right)\right)^2-\left(6-\left(2x^2-\frac{1}{2}x^3\right)\right)^2\right) & \text{, para } x\in[2,4]\end{cases}$$

Luego, para este sólido, el volumen viene dado por

$$\pi\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^6-2x^5+3x^4+14x^3-52x^2+48x\right)\mathrm{d}x$$
$$+\,\pi\int_2^4\left(-\frac{1}{4}x^6+2x^5-3x^4-14x^3+52x^2-48x\right)\mathrm{d}x$$